## 行列の $n$ 乗

2008/8/29 更新

1. $n$ は自然数とし，$A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ とする．

(1) $x^n=(x^2-5x+6)Q(x)+a(x-2)+b(x-3)$ ($Q(x)$ は整式) を満たす定数 $a,\ b$ を求めよ．

(2) $A^n$ を求めよ．

2. $n$ は自然数とし，$A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ とする．

(1) $A^2-\alpha A=\beta(A-\alpha E)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つような $\alpha,\ \beta$ を求めよ．

(2) $A^n$ を求めよ．

3. $n$ は自然数とする．$A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ 1\end{pmatrix}$ について，以下の問に答えよ．

(1) $AX=\lambda X$ を満たす $\lambda$ と $x$ の 2 つの組 $(\lambda_1,\ x_1)$, $(\lambda_2,\ x_2)$ を求めよ．だたし，$\lambda_1<\lambda_2$ とする．

(2) $AX=\lambda X$ が成り立つとき，$A^nX$ を $n,\ \lambda,\ X$ で表せ．

(3) $A^n$ を求めよ．

4. $n$ は自然数とする．$A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ する．2 次の正方行列 $P,\ Q$ が

$$P+Q=E,\ PQ=O,\ xP+yQ=A\ (x<y)$$

を満たすとき，以下の問に答えよ．

(1) $P^2=P,\ Q^2=Q,\ QP=O$ が成り立つことを示せ．

(2) $x,\ y,\ P,\ Q$ を求めよ．

(3) $A^n$ を求めよ．

5. $n$ は自然数とし，$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $A=\alpha E+N,\ N^2=O$ を満たす $\alpha,\ N$ を求めよ．

(2) $A^n$ を求めよ．

6. $n$ は自然数とし，$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ とする．

(1) $P^{-1}AP$ を求めよ．

(2) $A^n$ を求めよ．

7. $n$ は自然数とする．$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ のとき，$A^n$ を求めよ．

8. $n$ は自然数とする．$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ のとき，$A^n$ を求めよ．

9. $n$ は自然数とする．$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -7 & -3\end{pmatrix}$ のとき，$A^n$ を求めよ．

10. $n$ は自然数とする．$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ のとき，$A^n$ を求めよ．

11. $n$ は自然数とする．$A=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$ のとき，$A^n$ を求めよ．

1.(1) 与式両辺の $x$ に 2, 3 を代入すると,

$$2^n=b(-1),$$
$$3^n=a\cdot 1.$$
$$\therefore a=3^n,\ b=-2^n.$$

(2) $x$ の多項式

$$Q(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

に対し, 2 次の正方行列 $X$ の多項式 $Q(X)$ を

$$Q(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_1X+a_0E$$

($E$ は単位行列)

と定める. (1) より

$$x^n=(x^2-5x+6)Q(x)+3^n(x-2)-2^n(x-3).$$

任意の 2 次の正方行列 $X$ は $XE=EX(=X)$ をみたすから

$$X^n=(X^2-5X+6E)Q(X)$$
$$+3^n(X-2E)-2^n(X-3E).$$

上記の $X$ に $A$ を代入すると

$$A^n=(A^2-5A+6E)Q(A)$$
$$+3^n(A-2E)-2^n(A-3E).$$

ここで, ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2-5A+6E=O$$

だから

$$A^n=3^n(A-2E)-2^n(A-3E)$$
$$=3^n\begin{pmatrix}2&-2\\1&-1\end{pmatrix}-2^n\begin{pmatrix}1&-2\\1&-2\end{pmatrix}.$$
$$\left(=\begin{pmatrix}2\cdot3^n-2^n&-2\cdot3^n+2\cdot2^n\\3^n-2^n&-3^n+2\cdot2^n\end{pmatrix}\right)$$

←不要と思いますが…

2.(1) 与式を変形すると

$$A^2-(\alpha+\beta)A+\alpha\beta E=O. \qquad \cdots①$$

また, ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2-5A+6E=O. \qquad \cdots②$$

① − ② より,

$$\{5-(\alpha+\beta)\}A+(\alpha\beta-6)E=O. \qquad \cdots③$$

ここで, 仮に $5-(\alpha+\beta)\neq 0$ とすると

$$A=\frac{\alpha\beta-6}{(\alpha+\beta)-5}E$$

となるが, これは $A=\begin{pmatrix}4&-2\\1&1\end{pmatrix}$ が $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ のスカラー倍の形で表せないことに反する. よって

$$5-(\alpha+\beta)=0.$$

これと③より,

$$\alpha\beta-6=0.$$

したがって,

$$\begin{cases}\alpha+\beta=5,\\ \alpha\beta=6.\end{cases}$$

よって,

$$(\alpha,\ \beta)=(2,\ 3),\ (3,\ 2).$$

(2) $(\alpha,\ \beta)=(2,\ 3)$ のとき, 与式は,

$$A^2-2A=3(A-2E). \qquad \cdots④$$

④の両辺を $A^n$ 倍 ($n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ A^0=E$) して

$$A^{n+2}-2A^{n+1}=3\left(A^{n+1}-2A^n\right).$$

よって,

$$A^{n+1}-2A^n=3^n(A-2E). \qquad \cdots①$$

$(\alpha,\ \beta)=(3,\ 2)$ のとき, 同様にして,

$$A^{n+1}-3A^n=2^n(A-3E). \qquad \cdots②$$

① − ② より,

$$A^n=3^n(A-2E)-2^n(A-3E)$$
$$=3^n\begin{pmatrix}2&-2\\1&-1\end{pmatrix}-2^n\begin{pmatrix}1&-2\\1&-2\end{pmatrix}.$$
$$\left(=\begin{pmatrix}2\cdot3^n-2^n&-2\cdot3^n+2\cdot2^n\\3^n-2^n&-3^n+2\cdot2^n\end{pmatrix}\right)$$

3.(1) $AX=\lambda X$ より,

$$(A-\lambda E)\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}. \qquad \cdots①$$

つぶされた

ここで, 仮に $(A-\lambda E)^{-1}$ が存在したとすると

$$\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}=(A-\lambda E)^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

となり, 矛盾である. よって $(A-\lambda E)^{-1}$ は存在しない.

$$\therefore\ \det(A-\lambda E)=\det\begin{pmatrix}4-\lambda&-2\\1&1-\lambda\end{pmatrix}$$
$$=(4-\lambda)(1-\lambda)-(-2)\cdot1$$
$$=\lambda^2-5\lambda+6$$
$$=(\lambda-2)(\lambda-3)=0.$$
$$\therefore\ \lambda=2,\ 3.$$

$\lambda=2$ のとき, ①は,

$$\begin{pmatrix}2&-2\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$
$$\text{i.e. }\begin{cases}2x-2=0,\\x-1=0\end{cases}\iff x=1.$$

$\lambda=3$ のとき, ①は,

$$\begin{pmatrix}1&-2\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

i.e. $x=2$.

以上より,

$$(\lambda_1,\ x_1)=(2,\ 1),\ (\lambda_2,\ x_2)=(3,\ 2).$$

(2)　$AX=\lambda X$ のとき，

$$A^2X=A\cdot AX=A(\lambda X)=\lambda AX=\lambda^2X,$$
$$A^3X=A\cdot A^2X=A(\lambda^2X)=\lambda^2AX=\lambda^3X,$$
$$\vdots$$
$$A^nX=\lambda^nX.$$

(3)　(1)，(2) より，

$$A^n\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=2^n\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$
$$A^n\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=3^n\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

この 2 式をまとめると，

$$A^n\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n&2\cdot3^n\\2^n&3^n\end{pmatrix}.$$

よって，

$$\begin{aligned}A^n&=\begin{pmatrix}2^n&2\cdot3^n\\2^n&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}2^n&2\cdot3^n\\2^n&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2\cdot3^n-2^n&-2\cdot3^n+2\cdot2^n\\3^n-2^n&-3^n+2\cdot2^n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

4.(1)

$$P+Q=E, \qquad \cdots①$$
$$PQ=O, \qquad \cdots②$$
$$xP+yQ=A \qquad \cdots③$$

とする．①より $P=E-Q$ だから，

$$P^2=P(E-Q)=P-PQ=P-O=P.$$

同様に，$Q=E-P$ だから，

$$Q^2=(E-P)Q=Q-PQ=Q-O=Q.$$

したがって，

$$QP=(E-P)P=P-P^2=P-P=O.$$

(2)　①$\times y-$③ より，

$$(y-x)P=yE-A.$$

よって，

$$P=\frac{1}{y-x}(yE-A). \qquad \cdots④$$

③$-$①$\times x$ より，同様にして，

$$Q=\frac{1}{y-x}(A-xE). \qquad \cdots⑤$$

これら 2 式と②より，

$$\frac{1}{(y-x)^2}(yE-A)(A-xE)=O.$$

したがって，

$$\begin{aligned}&(A-xE)(A-yE)\\=&A^2-(x+y)A+xyE=O. \qquad \cdots⑥\end{aligned}$$

一方，ケーリー・ハミルトンの定理より，

$$A^2-5A+6E=O. \qquad \cdots⑦$$

⑥ − ⑦ より，

$$\{5-(x+y)\}A+(xy-6)E=O. \qquad \cdots⑧$$

ここで，仮に $5-(x+y)\neq0$ とすると，

$$A=\frac{xy-6}{(x+y)-5}E$$

となるが，これは $A=\begin{pmatrix}4&-2\\1&1\end{pmatrix}$ は $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ のスカラー倍の形で表せないことに反する．

$$\therefore\ 5-(x+y)=0.$$

これと⑧より，

$$xy-6=0.$$

したがって

$$\begin{cases}x+y=5,\\xy=6.\end{cases}$$

$x<y$ より，

$$(x,\ y)=(2,\ 3).$$

これと④，⑤より，

$$P=3E-A=\begin{pmatrix}-1&2\\-1&2\end{pmatrix},$$
$$Q=A-2E=\begin{pmatrix}2&-2\\1&-1\end{pmatrix}.$$

(3)　(2) と③より，

$$A=2P+3Q. \qquad \cdots③'$$

これを用いて，命題

$$R(n):A^n=2^nP+3^nQ$$

が $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ で成り立つことを数学的帰納法で示す．

- $R(1)$ は③'より成立している．
- $n$ を固定する．$R(n)$ を仮定し，

$$R(n+1):A^{n+1}=2^{n+1}P+3^{n+1}Q$$

を示す．

$$\begin{aligned}A^{n+1}&=AA^n\\&=(2P+3Q)(2^nP+3^nQ)\ (③',\ R(n)\text{ より})\\&=2^{n+1}P^2+2\cdot3^nPQ+3\cdot2^nQP+3^{n+1}Q^2\\&=2^{n+1}P+3^{n+1}Q\ (\because (1)\text{ と }PQ=O).\end{aligned}$$

よって，$R(n+1)$ も示せた．

○ 以上より $R(n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ が示せた．

よって

$$\begin{aligned}A^n =&2^nP+3^nQ\\ =&2^n\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}+3^n\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\left(=\begin{pmatrix}2\cdot3^n-2^n & -2\cdot3^n+2\cdot2^n\\ 3^n-2^n & -3^n+2\cdot2^n\end{pmatrix}\right)$$

5.(1) $A=\alpha E+N,\ N^2=O$ より，

$$\begin{aligned}N^2 =&(A-\alpha E)^2\\ =&A^2-2\alpha A+\alpha^2E=O.\end{aligned} \qquad \cdots ①$$

一方，ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2-4A+4E=O. \qquad \cdots ②$$

① − ② より，

$$(4-2\alpha)A+(\alpha^2-4)E=O. \qquad \cdots ③$$

ここで，仮に $4-2\alpha\neq0$ とすると

$$A=-\frac{\alpha^2-4}{4-2\alpha}E$$

となるが，これは $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ が $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ のスカラー倍の形で表せないことに反する．よって

$$4-2\alpha=0.$$

これと③より

$$\alpha^2-4=0.$$

以上より

$$\alpha=2,$$

$$N=A-2E=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

(2) $AE=EA$ より，二項定理が使えて，

$$\begin{aligned}&A^n\\ =&(2E+N)^n\\ =&(2E)^n+n(2E)^{n-1}N+{}_n\mathrm{C}_2(2E)^{n-2}N^2\\ &\qquad+{}_n\mathrm{C}_3(2E)^{n-3}N^3+\cdots+N^n\\ =&2^nE+n2^{n-1}N+N^2\times(N,\ E\text{ の多項式})\\ =&2^nE+n2^{n-1}N \qquad (\because N^2=O)\\ =&2^n\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+n2^{n-1}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}(2-n)2^{n-1} & n2^{n-1}\\ -n2^{n-1} & (2+n)2^{n-1}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

6.(1)

$$\begin{aligned}&P^{-1}AP\\ =&\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(2) $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ とおくと，(1) より，

$$\begin{aligned}&A^n\\ =&(PBP^{-1})^n\\ =&(PBP^{-1})(PBP^{-1})\cdots(PBP^{-1})\\ =&PB(P^{-1}P)B(P^{-1}P)B\cdots B(P^{-1}P)BP^{-1}\\ =&PB^nP^{-1}.\end{aligned} \qquad \cdots ①$$

ここで，

$$B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix},$$

$$B^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 0 & 4\end{pmatrix},$$

$$B^3=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 12\\ 0 & 8\end{pmatrix}$$

であるから，命題

$$P(n):B^n=\begin{pmatrix}2^n & n2^{n-1}\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}$$

が $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ で成り立つことが予想される．これを数学的帰納法で示す．

○ $P(1)$ は $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ より成立している．

○ $n$ を固定する．$P(n)$ を仮定し，

$$P(n+1):B^{n+1}=\begin{pmatrix}2^{n+1} & (n+1)2^n\\ 0 & 2^{n+1}\end{pmatrix}$$

を示す．

$$\begin{aligned}B^{n+1} =&BB^n\\ =&\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & n2^{n-1}\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}2^{n+1} & n2^n+2^n\\ 0 & 2^{n+1}\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}2^{n+1} & (n+1)2^n\\ 0 & 2^{n+1}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

よって，$P(n+1)$ も成り立つ．

○ 以上より，$P(n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が示された．

よって，①より

$$\begin{aligned}A^n &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & n2^{n-1}\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(4-n)2^{n-1} & (-2+n)2^{n-1}\\ -2^n & 2^n\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}(2-n)2^{n-1} & n2^{n-1}\\ -n2^{n-1} & (2+n)2^{n-1}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

7. ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2-0A+(-3)E=O,$$

i.e. $A^2=3E$.

よって，$m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ に対して

$$\begin{aligned}A^{2m} &= \left(A^2\right)^m=(3E)^m=3^mE,\\ A^{2m+1} &= A^{2m}A=3^mA.\end{aligned}$$

したがって，

$$A^n = 3^{\frac{n}{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ (n\text{ が偶数のとき}),$$

$$A^n = 3^{\frac{n-1}{2}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\ (n\text{ が奇数のとき}).$$

8. ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2-5A+0E=O.$$

i.e. $A^2=5A$.

よって

$$\begin{aligned}A^3 &= A^2A=5AA=5A^2=5\cdot 5A=5^2A,\\ A^4 &= A^3A=5^2AA=5^2A^2=5^2\cdot 5A=5^3A,\\ &\ \vdots\end{aligned}$$

←厳密には数学的帰納法

$$\begin{aligned}A^n &= 5^{n-1}A\\ &= 5^{n-1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

9. ケーリー・ハミルトンの定理より，

$$A^2-(-1)A+1E=O.$$

すなわち，

$$A^2+A+E=O.$$

$$\therefore (A-E)(A^2+A+E)=(A-E)O.$$

$A$ と $E$ は積の交換が可能だから

$$A^3-E=O \text{ i.e. } A^3=E.$$

よって，$m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ に対して

$$\begin{aligned}A^{3m} &= \left(A^3\right)^m=E^m=E,\\ A^{3m+1} &= A^{3m}A=A,\\ A^{3m+2} &= A^{3m}A^2=A^2.\end{aligned}$$

すなわち，

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ (n=3m\text{ のとき}),$$

$$A^n=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -7 & -3\end{pmatrix}\ (n=3m+1\text{ のとき}),$$

$$A^n=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 7 & 2\end{pmatrix}\ (n=3m+2\text{ のとき}).$$

10. $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ は，角 $\theta$ の回転行列だから，$A^n$ は角 $n\theta$ の回転行列となる．よって

$$A^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}.$$

(ゲンミツな証明は数学的帰納法による)

11.

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\\ &= 2\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\\ &= 2\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ A^n &= 2^n\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}^n\\ &= 2^n\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3}n & -\sin\frac{\pi}{3}n\\ \sin\frac{\pi}{3}n & \cos\frac{\pi}{3}n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

**(注)** $n$ を 6 で割った余りに応じて場合分けして答えることもできる．